

# “La lógica debe bastarse a sí misma”

César González Ochoa

Esta frase parte de uno de los pasajes más conocidos del *Tractatus Logico-Philosophicus* de Wittgenstein (parágrafo 5.473), es una manifestación del reclamo de autonomía de la lógica en oposición a la lógica tradicional, incluidos los desarrollos de Frege y de Russell, quienes admiten que las proposiciones de la lógica tienen cierto contenido. Quisiera en las páginas siguientes intentar la explicación del alcance de la propuesta de Wittgenstein, pero para ello es necesario aclarar brevemente las posiciones de aquéllos.

La *Conceptografía* de Frege es una etapa primera para la elaboración de su proyecto de reducir la aritmética a la lógica; es decir, demostrar que todos los enunciados aritméticos pueden formularse recurriendo exclusivamente a un repertorio básico de nociones lógicas, y que todas las verdades aritméticas pueden probarse a partir de un conjunto inicial de verdades lógicas primitivas.<sup>1</sup> Para ello, lo primero que hizo fue construir un lenguaje formalizado que se pretendía exento de las ambigüedades e imperfecciones del lenguaje ordinario, capaz de representar con precisión el contenido conceptual de los enunciados y dotado de reglas definidas para realizar las inferencias deductivas.

Su idea fundamental es la aplicación de la notación funcional al análisis de las proposiciones, lo cual consiste en tomar un símbolo que ocurre en uno o más lugares de una expresión como posible de sustitución por otro símbolo, con lo que se obtiene una nueva expresión. La parte de la expresión que permanece invariable en esa sustitución se llama función, y argumento de la función a la parte sustituible. Sin el argumento, la expresión está incompleta o insaturada. Por ejemplo, las proposiciones  $Fa$ ,  $Fb$ ,  $Fc$  se obtienen por la saturación de la expresión funcional  $F()$  con los diferentes argumentos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Para algunos de esos argumentos, la proposición resultante será verdadera, y se dice en ese caso que la función constituye una propiedad ejemplificada por los objetos que hacen verdadera la proposición, o un concepto en el cual

---

<sup>1</sup> Gottlob Frege, *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos* (trad. de H. Padilla), México: UNAM, 1972.

esos objetos están subsumidos. Frege extendió el procedimiento a funciones de dos o más argumentos, lo que hizo posible un tratamiento formal satisfactorio de la noción de relación. El análisis de la proposición en términos de función y argumento dejó atrás los supuestos de la lógica previa que entendía la proposición como un sujeto y un predicado unidos por una cópula, y abrió el camino para un tratamiento sistemático de las proposiciones generalizadas. Tradicionalmente, en la proposición "Todo hombre es mortal" se atribuía el predicado 'mortal' a 'todo hombre', considerado como sujeto. En la propuesta de Frege, se considera que esa proposición expresa no una propiedad de un supuesto sujeto general sino una propiedad de la función; lo que afirma es que la función "( ) es mortal" es verdadera para cualquier argumento que designe a un hombre. "Todo A es B" equivale a atribuir la función "Si A(x) entonces B(x)" la propiedad de ser verdadera para cualquier argumento x. Al representar esa proposición generalizada en la notación de Frege, el sujeto gramatical "todo A" simplemente desaparece y, con ello, ya no se considera como constituyente de la proposición.

En los años posteriores a la *Conceptografía*, Frege publica los *Fundamentos de la aritmética*, donde expone los principios para realizar la reducción. Pero es en los volúmenes llamados *Leyes fundamentales de la aritmética* donde realmente se enfrenta al proyecto. Allí desarrolla la noción de extensión de una función o de un concepto, entendida como la clase de objetos que ejemplifican ese concepto. Uno de los axiomas es que todo concepto determina una cierta extensión de modo tal que extensiones o clases pasan a figurar en su sistema como nociones puramente lógicas. Al definir en términos de clases nociones tales como número y sucesor de un número, Frege concluyó que todos los razonamientos de la aritmética se reducen a patrones de inferencia lógicamente válidos; con ello demostraba la identificación de la aritmética y la lógica.

Pero la consistencia de la noción de clase y especialmente el supuesto de que cada concepto debe determinar incondicionalmente una extensión fueron cuestionados por Russell con el descubrimiento de la noción de 'clase que no pertenece a sí misma'. Si existe una extensión de este concepto, será la clase que contiene exclusivamente todas las clases que no pertenecen a sí mismas, pero admitir una clase así lleva a una contradicción al tratar de dar una respuesta a la pregunta sobre si esa clase pertenece o no a sí misma: si pertenece a sí misma, no puede pertenecer a la clase de las clases que no pertenecen a sí mismas; y si no pertenece a sí misma, debe pertenecer a la clase de las clases que no pertenecen a sí mismas.

Las aportaciones de Frege, sin embargo, están incorporadas a los *Principia Mathematica* (PM) de Russell y Whitehead.<sup>2</sup> Allí se define una función

---

<sup>2</sup> Bertrand Russell y A. N. Whitehead, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press,

proposicional como una expresión que contiene una variable y que se vuelve proposición cuando esa variable asume un valor definido. La contradicción de Russell se evita porque clases y extensiones de funciones no figuran como entidades genuinas sino sólo como artificios de notación, pero ello no evita una dificultad pues la contradicción aparece en términos de funciones proposicionales. Por ejemplo, "x es par" es una proposición verdadera para valores 2, 4, etc., de x; es decir, esa función es una propiedad ejemplificada por esos argumentos. Pero habría una propiedad de ser ejemplificada por todas las propiedades que no se ejemplifican a sí mismas, donde reaparece la contradicción.

En los PM el problema se resuelve con el rechazo de la idea de que una propiedad pueda o no ejemplificarse a sí misma, lo que se consigue rechazando la legitimidad de funciones que se toman a sí mismas como argumentos. Esto es un resultado de un principio lógico más general llamado del círculo vicioso, que prohíbe suponer que una totalidad, o colección de objetos, contenga miembros que sólo puedan ser definidos por medio de la colección como un todo. Una función proposicional  $Fx$  estará bien definida cuando sus valores  $Fa, Fb, Fc, \dots$ , se definan para todo su dominio de argumentos. Entre esos valores no puede haber algo que presuponga la propia función pues ello implica un círculo vicioso: sus valores no estarían determinados hasta que la función estuviera determinada, mientras que la determinación de la función sólo podría ocurrir después de la determinación de sus valores. El resultado de ello es que no puede existir el valor  $Fx$  para el argumento  $Fx$  o para cualquier argumento que lo involucre. Es decir, el símbolo  $F(Fx)$  representa una impropiedad lógica y debe considerarse como desprovisto de significado. En resumen, es la simple imposibilidad de formular la antinomia de Russell en el interior del sistema lógico de los PM lo que preserva la consistencia de ese sistema.<sup>3</sup>

La aplicación de este sistema introduce una jerarquía ordenada en el dominio de las funciones proposicionales. En el primer nivel estarían las funciones que toman individuos como argumentos; después vendrían las funciones que toman esas funciones del primer nivel como argumentos, y así en adelante. Existe una separación entre tales niveles de modo que cada función sólo

---

1910-1913. Dice Ayer que el sistema de los PM "es extensional en el sentido de que, dentro de él, la sustitución dentro de una proposición por otra del con el mismo valor veritativo siempre deja inalterable el valor veritativo de la proposición en la cual tiene lugar la sustitución". (A. J. Ayer, *Russell*, Londres: Fontana/Collins, 1972, pp. 45-6).

<sup>3</sup> El intento de Russell de resolver paradojas como la de Epiménides "desembocó en lo que se conoce como teoría de los tipos. Esta teoría [...] en su forma más simple viene a establecer el principio de que el significado de una función proposicional no queda explícito hasta que se especifican los dominios de objetos candidatos a su satisfacción. De aquí se sigue que estos candidatos no pueden incluir significativamente cualquier cosa que se defina en los términos de la función misma" (A. J. Ayer, *Op. Cit.*, p. 52).

puede ser argumento de una función del nivel inmediato superior. La jerarquía de funciones, extendida por la consideración de relaciones, o sea, por funciones de dos o más argumentos, constituye la base de la teoría de los tipos.<sup>4</sup>

El principio del círculo vicioso era un principio lógico de gran alcance que servía para todas las paradojas que involucran la noción de autorreferencialidad, como la de Epiménides. Allí aparece una proposición o una designación y, por ese principio, no pueden ser tomadas ellas mismas como parte de las totalidades a las que se refieren constitutivamente. La verdad de la afirmación de Epiménides no entra en choque con la falsedad de todas las afirmaciones a las que se refiere, pues ella misma es una afirmación que, lógicamente, no forma parte de aquella totalidad.

La introducción del principio del círculo vicioso, a pesar de su eficacia para resolver las paradojas, trajo una complejidad adicional en la jerarquía de las funciones proposicionales pues la misma noción de individuo es una totalidad problemática que requiere ser analizada. Por ejemplo, la proposición "A tiene todas las cualidades de un gran hombre" atribuye a la persona A una cualidad que hace referencia a una totalidad de cualidades, por lo cual no puede formar parte de las cualidades involucradas en su definición. De allí que en cada nivel existan varios órdenes (primer orden, segundo, etc., en las funciones de individuos). Esto se llama en los PM teoría ramificada de los tipos, que es una teoría muy drástica pues convierte en ilegítima toda una serie de razonamientos indispensables en el campo de la inducción aritmética o en la teoría y el análisis de los números transfinitos. La solución que Russell propone es la introducción de axiomas como el de la reductibilidad, entre otros, lo que a su vez causaba otras dificultades.

En resumen, el edificio de los PM, aunque exento de la contradicción fundamental que amenazaba el sistema de Frege contiene, a su vez, un serio defecto que consiste en la adopción de bases axiomáticas lógicamente cuestionables. Es en este punto donde entra Wittgenstein.

A partir del cuestionamiento de la validez lógica de ciertos axiomas de los PM, el interés de Wittgenstein se orienta hacia los problemas que él considera cruciales y a los que el *Tractatus* pretende dar respuesta; entre ellos: cuál es la naturaleza distintiva de la lógica en oposición a otras disciplinas científicas y en qué se distinguen las proposiciones de la lógica de otras proposiciones factuales o empíricas.

---

<sup>4</sup> Según Ayer, "Russell desemboca en un sistema en el que las funciones proposicionales y, consecuentemente, las proposiciones, se hallan dispuestas en una jerarquía. En el nivel más bajo disponemos de funciones satisfacibles por individuos; a continuación, funciones satisfacibles por conjuntos de individuos; después, funciones que lo son por conjuntos de conjuntos de individuos, y así sucesivamente. Los candidatos para satisfacer las funciones de un nivel dado se dice que constituyen un tipo, y la regla general afirma que todo lo que puede decirse, sea verdadero o falso, acerca de los objetos de un tipo, no puede significativamente decirse de los objetos de un tipo diferente". (*Ibid.*, p. 52).

Tradicionalmente se ha dicho que las verdades lógicas son necesarias, en oposición al carácter meramente contingente de las verdades empíricas. Las proposiciones que enuncian verdades lógicas son más que simplemente verdaderas, pues no sólo lo son sino que no pueden dejar de serlo. Las que enuncian verdades factuales adquieren su verdad en virtud de alguna situación particular existente en el mundo, y serían falsas en el caso de no existir esa situación; las verdades lógicas son independientes de lo que es y lo que no es el caso, y seguirían siendo verdaderas incluso si la constitución factual del mundo cambiara.

Wittgenstein señaló otra propiedad de las proposiciones de la lógica: la verdad de éstas debe reconocerse por la simple observación del signo proposicional que las expresa. A esto es a lo que se denomina analiticidad de las proposiciones de la lógica. La verdad o falsedad de las proposiciones factuales está determinada por medio de una comparación con la realidad, con una instancia exterior a ellas. Las lógicas son analíticas, tienen su valor de verdad establecido por el análisis de las proposiciones mismas.

Necesidad y analiticidad son aspectos característicos de las proposiciones de la lógica; con todo, simplemente describirlas en esos términos no es dar una explicación de la naturaleza de estas proposiciones. Según Wittgenstein, en las obras de Frege y Russell la explicación está ausente; aunque ambos hayan establecido la distinción entre la lógica y las otras disciplinas, sus explicaciones son en último análisis insatisfactorias porque no capturan lo radical de la distinción.

Además de necesidad y analiticidad, Wittgenstein menciona la exigencia de que la verdad de una proposición lógica sea revelada por el análisis de la proposición; esto también está ausente en los sistemas de Frege y Russell. Ambos admiten que las verdades lógicas no se establecen por una comparación con la realidad factual y, en ese sentido les atribuyen un carácter *a priori*; al suponer que hay un cierto contenido significativo en las proposiciones de la lógica, explican el reconocimiento de la verdad de tales proposiciones en términos de la aprehensión de esos contenidos, o sea, de la verdad de aquello que afirman. Lo que se afirma puede ser algo muy simple o algo muy complejo, pero la verdad no puede revelarse por alguna aprehensión intuitiva inmediata o por la comprensión del significado de los términos que las forman. Ellos buscan esto por medio de la presentación axiomática de sus sistemas, es decir, por la delimitación de un conjunto reducido de verdades lógicas iniciales y de ciertas reglas de inferencia que permiten derivar todas las demás verdades lógicas. Por tanto, determinar que una proposición enuncia una verdad requiere mostrar su prueba, deducir los axiomas del sistema según reglas lógicas de inferencia. Así que, aunque se trate de un método formal, sin referencias a la realidad empírica, todavía están lejos del requisito de que la verdad debe expresarse de manera visible en la estructura de la proposición.

Wittgenstein afirmó que la característica más importante de las proposiciones no lógicas (las empíricas) es que su valor de verdad no puede determinarse

por el simple examen del signo proposicional.<sup>5</sup> No se puede describir si son verdaderas o falsas por análisis sino que se requiere una comparación con la realidad. ¿Cómo explicar la existencia de una categoría de proposiciones cuya verdad es indiferente al mundo real? Para él, esas proposiciones no afirman nada sobre la realidad, son tautologías en el sentido de que están totalmente desprovistas de cualquier contenido informativo; no dicen nada (4.461, 5.142). Las proposiciones de la lógica no pueden ser desmentidas por los hechos.

Esto introduce una ruptura respecto a Frege y Russell, quienes admiten que las proposiciones de la lógica tienen cierto contenido:  $p$  o no  $p$ , si  $p$  entonces  $q$ , etc., son verdaderas por ciertas características de los conceptos lógicos de negación, disyunción o implicación, que se toman como parte del contenido de tales proposiciones. Desde su punto de vista, las proposiciones de la lógica no difieren de otras del tipo “si  $x$  es un gato, entonces  $x$  es un mamífero”, cuya verdad se establece a partir de la significación de las expresiones funcionales “ $x$  es un gato” y “ $x$  es un mamífero”. En ambos casos las proposiciones tienen un contenido significativo determinado que se articula a partir del significado de ciertos conceptos, sean éstos empíricos, como gato o mamífero, o lógicos, como de negación o disyunción.

Al negar cualquier contenido a las proposiciones lógicas, Wittgenstein impone una reevaluación del papel desempeñado por los símbolos de la lógica. No se admite que una proposición como “llueve o no llueve” se determine como verdadera a partir de reconocer la propiedad de la función proposicional  $p$  de ser universalmente verdadera para cualquier  $p$ . La ley del tercero excluido no es un asunto de esa proposición y los operadores lógicos de negación y disyunción no figuran como los conceptos empíricos, es decir, no contribuyen en el contenido total con un cierto significado. Este principio de que los símbolos de la lógica (las constantes lógicas), al contrario de los términos que designan conceptos empíricos no establecen relaciones significativas con elementos de la realidad es una de las ideas centrales del *Tractatus*.

Si las constantes lógicas no actúan como símbolos para designar un tipo de objetos lógicos ¿cuál es su contribución al significado de las proposiciones en las que figuran? “llueve” puede ser verdadera o falsa, pero a partir de ella se obtiene “llueve o no llueve”, que es verdadera en cualquier circunstancia y su verdad es independiente del contenido de “llueve”, lo que muestra que los operadores lógicos de negación y disyunción se pueden combinar para dar una proposición lógicamente verdadera con cualquier  $p$ . Si las proposiciones lógicas son tautologías, la actuación de los operadores lógicos en ese esquema sólo puede consistir en neutralizar las relaciones significativas de  $p$  con la realidad. En este modo de actuación de las constantes lógicas, en

---

<sup>5</sup> Ludwig Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus* (trad. de Enrique Tierno Galván), Madrid: Alianza Universidad, 1973, parágrafo 6.113. De aquí en adelante se hace referencia dentro del texto sólo al número de parágrafo.

las proposiciones no hay un incremento de relaciones significativas derivadas de algún significado de tales constantes sino que es una operación sobre las relaciones significativas originales, operación que en el límite puede desarticular completamente esas relaciones.

La segunda exigencia de Wittgenstein acerca de las proposiciones de la lógica es que su valor de verdad pueda ser descubierto por el examen de la proposición. Por el hecho de ser tautologías, este carácter tautológico debe ser visible en ellas mismas. Los sistemas de Frege y Russell no dan este resultado: allí la determinación de que ciertas proposiciones expresan verdades lógicas exige una prueba en el interior del sistema deductivo. Wittgenstein asumió la tarea de construir un sistema de notación que hiciera visible el valor de verdad de las proposiciones lógicas.

Si todas las proposiciones lógicas son tautologías y dicen lo mismo (es decir, nada) (5.451), no hay manera de establecer una jerarquía entre ellas (6.127). Ninguna proposición lógica es más fundamental o más autoevidente que las otras y como en todas, su valor de verdad se manifiesta desde el inicio; es ociosa la construcción de un sistema deductivo para obtener verdades lógicas a partir de un conjunto de axiomas por medio de reglas de inferencia. En consecuencia, los PM y los tratados de Frege son inútiles en este aspecto, pues la lógica prescinde de la determinación de un conjunto de leyes fundamentales o del establecimiento de teorías de inferencia. Sus proposiciones son identificables por simple inspección del signo lingüístico que es vehículo. Esta autonomía de la lógica se expresa en la máxima que da título a este trabajo: la lógica debe bastarse a sí misma, o debe cuidar de sí misma, como se traduce literalmente de la versión inglesa.

En los PM, las exigencias de que ciertas funciones deban recibir argumentos de cierto tipo y no de otros se justifica por la existencia de entidades (cosas, propiedades) que sólo se pueden combinar de cierta manera. Las reglas de esa combinatoria forman la llamada teoría de los tipos, y con ello una base casi física se acopla al edificio de la lógica para darle sustentación. En Frege, la formación de oraciones por la saturación de un predicado propone una contrapartida en la realidad bajo la forma de dos tipos de entidades, saturadas e insaturadas, cuyo acoplamiento reproduce el que se verifica en el nivel del lenguaje. Ambos supuestos no se aceptan en la perspectiva de Wittgenstein bajo pena de introducir en la lógica elementos de naturaleza factual que le son esencialmente antitéticos. Para él, la lógica no puede presuponer ningún cuerpo de conocimientos sobre el comportamiento de las cosas; cualquier teoría como ésta se vuelve superflua si se dispone de una determinación precisa de las reglas sintácticas para las funciones, o sea, de las reglas que gobiernan las combinaciones admisibles de las expresiones del lenguaje. La ausencia de sentido de una oración se determina por medio de consideraciones internas al sistema simbólico, sin ninguna referencia a realidades extralingüísticas. Es sólo así que la lógica puede construirse como materia *a priori*, totalmente libre del dominio de la contingencia.

